Applications - Chapitre 13

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

EPFL

A.13.1 Pendule physique

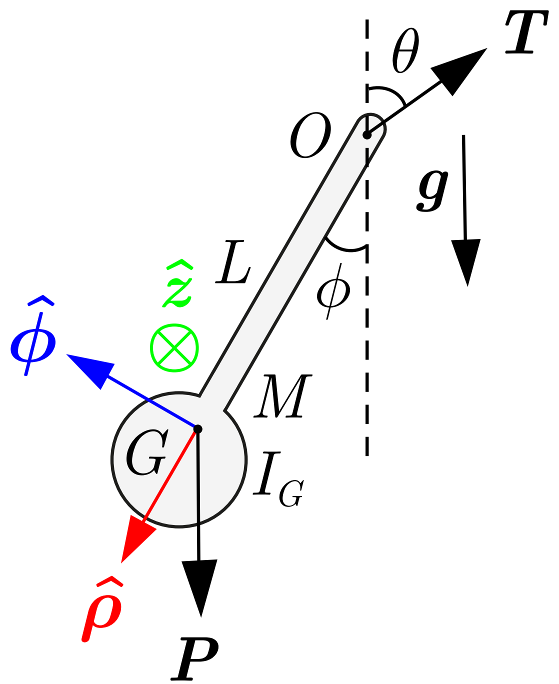
A.13.2 Barre mince en rotation

A.13.1 Pendule physique

A.13.2 Barre mince en rotation

A.13.1 Pendule physique

- Un pendule physique est un balancier constitué d'une barre et d'un cylindre de masse totale M. Le pendule oscille autour d'un axe horizontal qui passe par le point O.



- Soient $\boldsymbol{OG} = L\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ le vecteur position du centre de masse G, I_O et I_G, les moments d'inertie du pendule par rapport aux axes horizontaux parallèles qui passent par les points O et G.

- Théorème d'Huygens-Steiner :

$$(A.13.1)$$

- Pour un solide indéformable, contrairement à un point matériel, la tension $\boldsymbol{T}$ exercée au point d'attache O n'est pas orientée selon la droite OG qui passe par le centre de masse G (i.e. $\theta \neq \phi$).

- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \qquad (A.13.2)$$

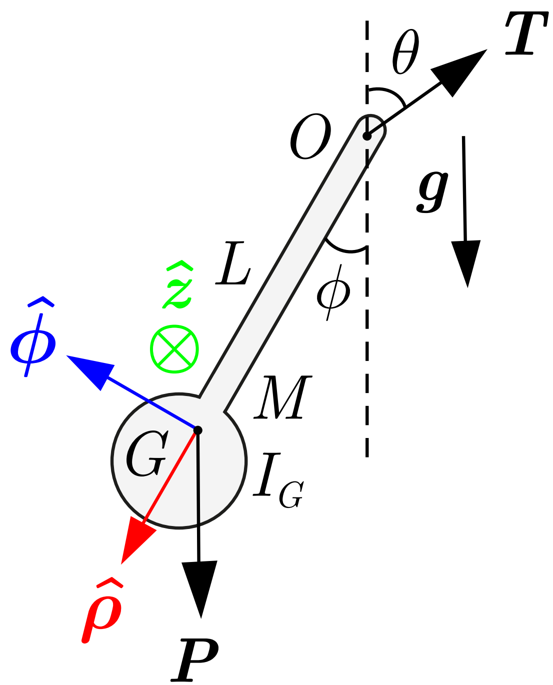
- Forces extérieures :

  1. Poids : en G $$(A.13.3)$$

     $$\boldsymbol{P} =$$

  2. Tension : en O $$(A.13.4)$$

     $$\boldsymbol{T} =$$



- Théorème du moment cinétique :

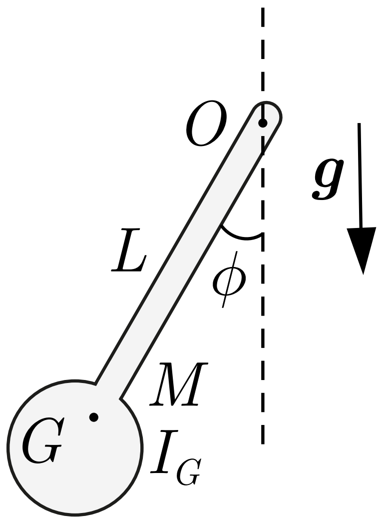
$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} =$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{z}} \ : \qquad (A.13.5)$$

- Equation du mouvement :

$$(A.13.6)$$



- Approximation des petits angles :

$$(A.13.6) \quad \Rightarrow \qquad (A.13.7)$$

- Pulsation :

$$\omega = \qquad (A.13.8)$$

- Période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \qquad (A.13.9)$$

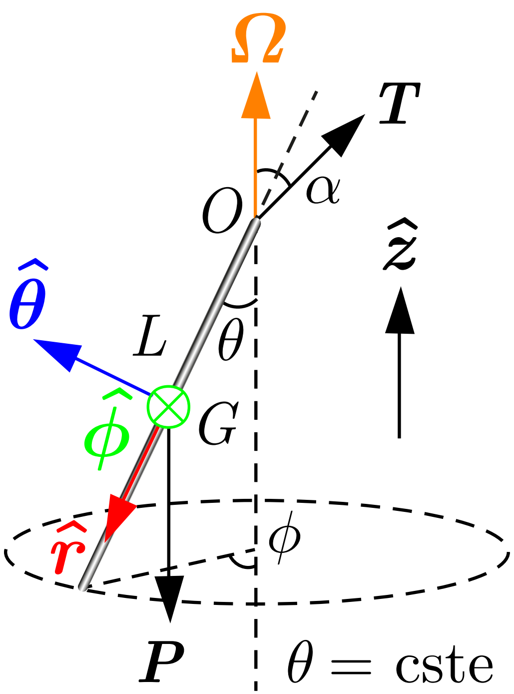
- La période T du pendule physique est plus longue que celle du pendule mathématique de même longueur L (i.e. $I_G = 0$).

A.13.1 Pendule physique

A.13.2 Barre mince en rotation

A.13.2 Barre mince en rotation

- Une barre indéformable et homogène de masse M, de longueur L et d'épaisseur négligeable est fixée à l'une de ses extrémité au point O. L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O.



- La barre est en rotation sans frottement à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{cste}$ autour de l'axe vertical.

- Soit $\left(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre.

- Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial Gr est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $G\theta$ et azimutal $G\phi$ sont égaux :

$$I_{G,\theta} = I_{G,\phi} \equiv I_G = \tag{A.13.10}$$

A.13.2 Barre mince en rotation

- Vitesse angulaire :

$$\boldsymbol{\Omega} = \qquad (A.13.11)$$

- Forces extérieures :

  1. Poids : en G

  $$\boldsymbol{P} = M\,\boldsymbol{g} = \qquad (A.13.12)$$

  $$=$$

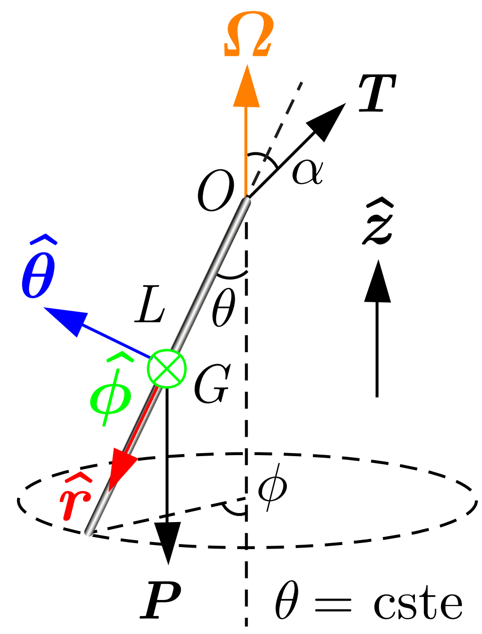
  2. Tension : en O

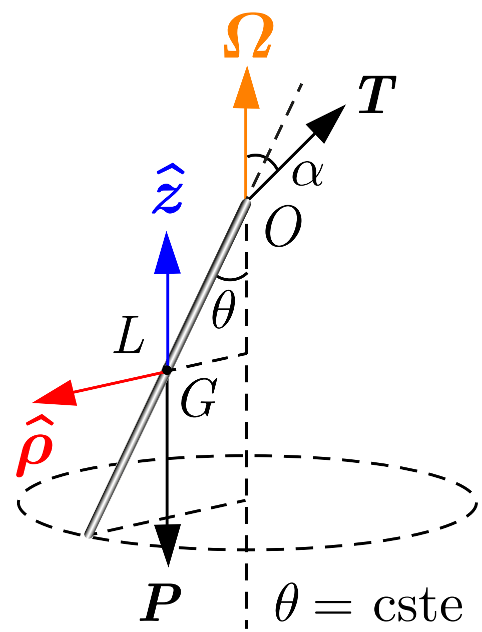
  $$\boldsymbol{T} = \qquad (A.13.13)$$

  $$=$$

- Accélération du centre de masse : centripète

$$\boldsymbol{A}_G = \qquad (A.13.14)$$



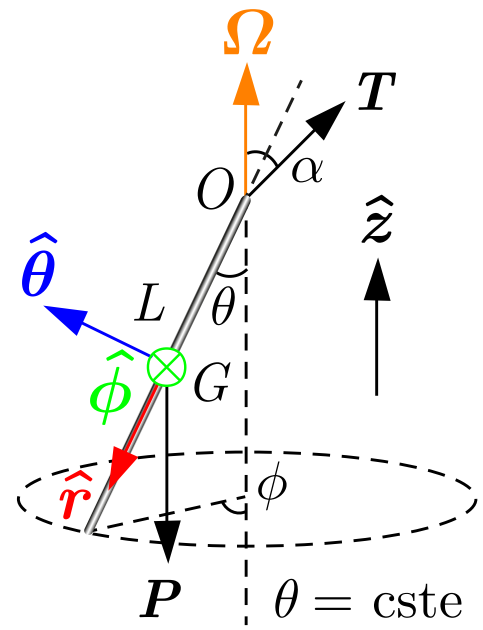


- Théorème du centre de masse :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \qquad (A.13.15)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:

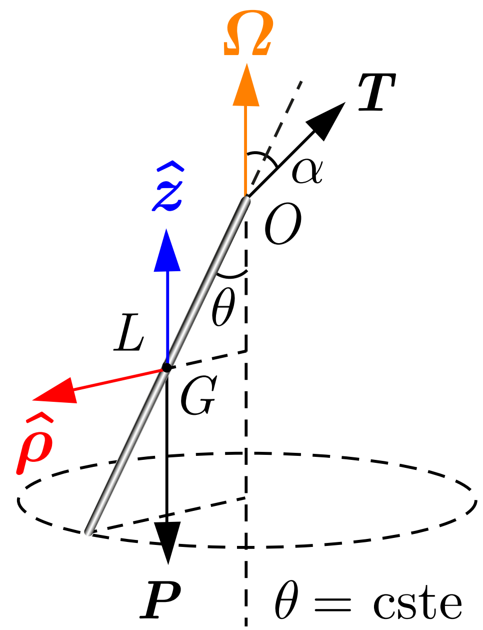
selon $\hat{\boldsymbol{z}}$:



- Composantes de la tension :

$$(A.13.16)$$

$$(A.13.17)$$



- Orientation de la tension : $(A.13.16)\,/\,(A.13.17)$

$$\tan\alpha = \qquad (A.13.18)$$

- Moment cinétique :

$$\boldsymbol{L}_G =$$

$$= \qquad (A.13.19)$$

- Formule de Poisson :

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \qquad (A.13.20)$$

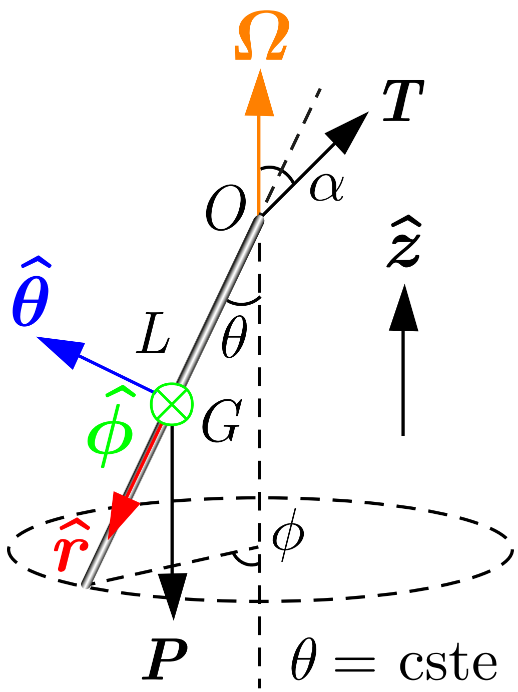
- Dérivée temporelle du moment cinétique :

$$\dot{\boldsymbol{L}}_G = \qquad (A.13.21)$$

- Moment de force extérieure : tension en O

$$\sum \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} =$$

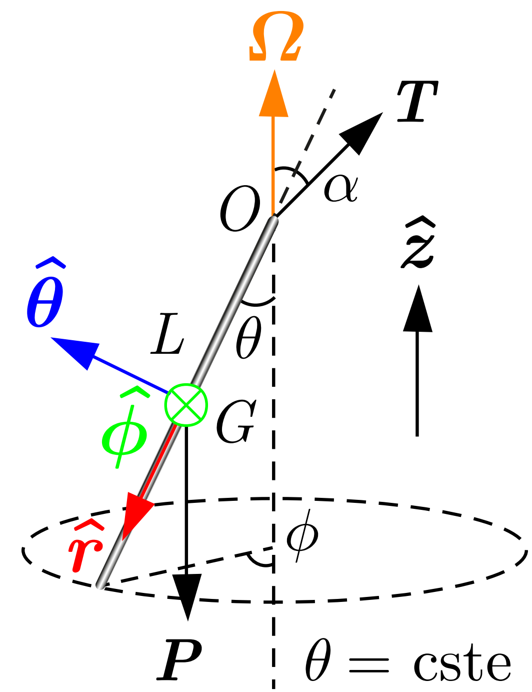
$$= \qquad (A.13.22)$$



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_G \qquad (A.13.23)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$:



- Formule de trigonométrie :

$$(A.13.24)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.13.25)$$

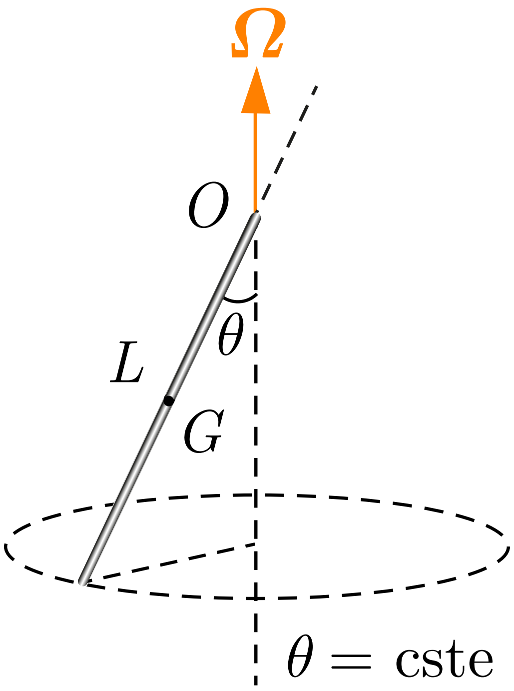
- Théorème du centre de masse : $(A.13.16) \cdot L$ et $(A.13.17) \cdot L$

$$(A.13.26)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.13.27)$$

- Equation du mouvement : $(A.13.27)\,/\sin\theta$

$$(A.13.28)$$



- Orientation de la barre :

$$\cos\theta = \qquad (A.13.29)$$

- Angle de nutation : $I_G = \dfrac{1}{12}\,ML^2$

$$\theta = \qquad (A.13.30)$$

Pour $I_G = 0$, on retrouve l'angle d'inclinaison vertical θ d'un pendule cônique de masse M, de longueur $L/2$ tournant à vitesse angulaire Ω.